

Daniel Li

# Cours d'analyse fonctionnelle

avec 200 exercices corrigés



2<sup>e</sup> édition

ellipses

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>iii</b>
<b>I. Espaces normés</b>	<b>1</b>
I.1. Espaces vectoriels normés . . . . .	1
I.1.1. Norme . . . . .	1
I.1.2. Quelques exemples usuels . . . . .	4
I.1.3. Espaces de Banach . . . . .	9
I.1.4. Applications linéaires . . . . .	12
I.1.5. Normes équivalentes . . . . .	14
I.2. Espaces vectoriels normés de dimension finie . . . . .	15
I.2.1. Equivalence des normes . . . . .	15
I.2.2. Compacité des boules . . . . .	17
I.3. Exercices . . . . .	19
<b>II. Espaces de Hilbert</b>	<b>27</b>
II.1. Généralités . . . . .	27
II.1.1. Définitions . . . . .	27
II.1.2. Propriétés élémentaires . . . . .	28
II.1.3. Orthogonalité . . . . .	30
II.1.4. Espaces de Hilbert . . . . .	31
II.2. Le Théorème de projection et ses conséquences . . . . .	32
II.2.1. Le Théorème de projection . . . . .	32
II.2.2. Conséquences . . . . .	34
II.2.3. Représentation du dual . . . . .	38
II.2.4. Adjoint d'un opérateur . . . . .	39
II.3. Bases orthonormées . . . . .	40
II.3.1. Espaces séparables . . . . .	40
II.3.2. Systèmes orthonormés . . . . .	41
II.3.3. Bases orthonormées . . . . .	43
II.3.4. Existence des bases orthonormées . . . . .	45
II.4. Séparabilité de $L^2(0, 1)$ . . . . .	46
II.4.1. Théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	46
II.4.2. Le système trigonométrique . . . . .	53
II.5. Exercices . . . . .	62

<b>III. Convolution et intégrales de Fourier sur <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>75</b>
III.1. Convolution . . . . .	75
III.1.1. Introduction . . . . .	75
III.1.2. Existence dans le cas " $L^p - L^q$ " . . . . .	76
III.1.3. Existence dans le cas " $L^1 - L^\infty$ " . . . . .	79
III.1.4. Existence dans le cas " $L^1 - L^1$ " . . . . .	81
III.1.5. Propriétés de régularité de la convolution . . . . .	85
III.2. Transformation de Fourier . . . . .	87
III.2.1. Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	87
III.2.2. Le théorème d'inversion . . . . .	91
III.2.3. Transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	94
III.3. Exercices . . . . .	98
III.3.1. Convolution . . . . .	98
III.3.2. Transformation de Fourier . . . . .	101
<b>IV. Le Théorème de Baire et ses conséquences</b>	<b>111</b>
IV.1. Le Théorème de Baire . . . . .	111
IV.2. Le Théorème de Banach-Steinhaus . . . . .	112
IV.3. Le Théorème de l'application ouverte . . . . .	114
IV.4. Exercices . . . . .	119
<b>V. Théorème de Radon-Nikodým et applications</b>	<b>125</b>
V.1. Mesures réelles et mesures complexes . . . . .	125
V.1.1. Variation d'une mesure . . . . .	125
V.1.2. Absolue continuité . . . . .	130
V.1.3. Mesures singulières . . . . .	131
V.2. Le Théorème de Radon-Nikodým . . . . .	132
V.3. Applications . . . . .	136
V.3.1. Décomposition polaire d'une mesure et intégration par rapport à une mesure complexe . . . . .	136
V.3.2. Caractère complet de $\mathcal{M}(S)$ . . . . .	138
V.3.3. Dual de $L^p(m)$ . . . . .	139
V.4. Exercices . . . . .	147
<b>VI. Le Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences</b>	<b>153</b>
VI.1. Forme analytique du Théorème de Hahn-Banach . . . . .	153
VI.2. Quelques conséquences de la forme analytique du Théorème de Hahn-Banach . . . . .	156
VI.3. La forme géométrique du Théorème de Hahn-Banach . . . . .	159
VI.4. Exercices . . . . .	165
<b>VII. Notions de Théorie Spectrale</b>	<b>171</b>
VII.1. Spectre d'un opérateur . . . . .	171
VII.1.1. Opérateurs inversibles . . . . .	171
VII.1.2. Spectre . . . . .	172
VII.1.3. Rayon spectral . . . . .	174

VII.2. Opérateurs compacts . . . . .	177
VII.2.1. Propriétés générales . . . . .	177
VII.2.2. Opérateur adjoint . . . . .	179
VII.2.3. Propriétés spectrales des opérateurs compacts . . . . .	180
VII.3. Théorie spectrale des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert . . . . .	184
VII.3.1. Opérateurs auto-adjoints . . . . .	184
VII.3.2. Spectre des opérateurs auto-adjoints dans un espace de Hilbert . . . . .	185
VII.3.3. Décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts . . . . .	187
VII.4. Annexe : Théorème d'Ascoli . . . . .	189
VII.5. Exercices . . . . .	192
<b>VIII. Dualité</b>	<b>199</b>
VIII.1. Topologie faible . . . . .	199
VIII.1.1. Définition . . . . .	199
VIII.1.2. Convergence . . . . .	201
VIII.1.3. Convergence faible dans l'espace des fonctions continues . . . . .	203
VIII.1.4. Quelques propriétés de la topologie faible . . . . .	204
VIII.1.5. Métrisabilité . . . . .	206
VIII.2. Topologie *-faible sur un dual . . . . .	208
VIII.2.1. Définition . . . . .	209
VIII.2.2. Réflexivité . . . . .	211
VIII.2.3. Métrisabilité . . . . .	213
VIII.2.4. Applications . . . . .	215
VIII.3. Annexe 1 : Représentation du dual de $\mathcal{C}_0(L)$ . . . . .	216
VIII.4. Annexe 2 : Théorème de Tychonov . . . . .	220
VIII.4.1. Filtres et ultrafiltres . . . . .	220
VIII.4.2. Limite selon un filtre . . . . .	221
VIII.4.3. Compacité et filtres. . . . .	221
VIII.5. Exercices . . . . .	223
<b>IX. Espaces de Sobolev</b>	<b>233</b>
IX.1. Introduction . . . . .	233
IX.1.1. Équation du pendule . . . . .	233
IX.1.2. Stratégie . . . . .	233
IX.2. Espaces de Sobolev . . . . .	234
IX.2.1. Dérivées faibles. . . . .	234
IX.2.2. Espaces de Sobolev . . . . .	237
IX.2.3. Théorèmes d'immersion . . . . .	238
IX.3. Retour à l'équation du pendule . . . . .	240
IX.4. Exercices . . . . .	244
<b>X. Notions sur les distributions</b>	<b>249</b>
X.1. Définitions . . . . .	249
X.1.1. Espace de fonctions-test . . . . .	249

X.1.2. Distributions . . . . .	250
X.2. Exemples . . . . .	252
X.2.1. Fonctions localement intégrables . . . . .	252
X.2.2. Mesures . . . . .	253
X.2.3. Distributions d'ordre $\geq 1$ . . . . .	255
X.2.4. Valeur principale . . . . .	256
X.2.5. Parties finies . . . . .	257
X.3. Opérations sur les distributions . . . . .	258
X.3.1. Multiplication par une fonction de classe $C^\infty$ . . . . .	258
X.3.2. Dérivation. . . . .	258
X.4. Théorème de structure . . . . .	260
X.4.1. Support d'une distribution . . . . .	261
X.5. Transformation de Fourier . . . . .	262
X.5.1. Impossibilité de définir la transformée de Fourier pour toutes les distributions . . . . .	263
X.5.2. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions indéfiniment déri- vables à décroissance rapide . . . . .	263
X.5.3. Distributions tempérées . . . . .	266
X.6. Exercices . . . . .	270
<b>XI. Corrigés des exercices</b>	<b>275</b>
XI.1. Exercices du Chapitre I . . . . .	275
XI.2. Exercices du Chapitre II . . . . .	295
XI.3. Exercices du Chapitre III . . . . .	323
XI.3.1. Convolution . . . . .	323
XI.3.2. Transformation de Fourier . . . . .	333
XI.4. Exercices du Chapitre IV . . . . .	352
XI.5. Exercices du Chapitre V . . . . .	363
XI.6. Exercices du Chapitre VI . . . . .	375
XI.7. Exercices du Chapitre VII . . . . .	383
XI.8. Exercices du Chapitre VIII . . . . .	393
XI.9. Exercices du Chapitre IX . . . . .	413
XI.10. Exercices du Chapitre X . . . . .	421
<b>Bibliographie sommaire</b>	<b>439</b>
<b>Index terminologique</b>	<b>441</b>