Julien Bernis
Laurent Bernis

Analyse pour l'agrégation de mathématiques

40 développements

2e édition augmentée

ellipses

Partie I

Introduction

1. La préparation de l'oral

L'AGRÉGATION externe est le concours de recrutement le plus difficile et le plus gratifiant que peuvent passer les étudiants français qui souhaitent enseigner les mathématiques. Composé d'épreuves écrites et orales conçues pour évaluer l'étendue des connaissances mathématiques du candidat, ce concours éprouve également sa capacité à les communiquer et les enseigner efficacement. Jean-Pierre Serre, Jean-Christophe Yoccoz, Cédric Villani, Laurent Lafforgue sont tant de lauréats illustres qui ont contribué au développement et à la diffusion des mathématiques. Sans chercher à se comparer à ces virtuoses, le candidat pourra garder à l'esprit qu'être admis à l'agrégation est un accomplissement qui s'inscrit dans une tradition d'excellence et dont il pourra s'enorgueillir. C'est précisément l'objectif de ce livre que d'aider les agrégatifs à obtenir le concours, en les accompagnant plus particulièrement durant les oraux d'analyse.

L'agrégation se déroule en deux temps : l'écrit en mars, qui conditionne l'admissibilité, et quelques mois après, l'oral, qui détermine l'admission et le rang du candidat.
La stratégie la plus naturelle consiste à concentrer ses efforts sur la préparation des écrits tout en repoussant celle des oraux, et ce afin de maximiser ses chances d'admissibilité.
C'est une tactique chaque année perdante pour de nombreux candidats...

Nous conseillons plutôt à l'agrégatif qui estime avoir atteint un niveau suffisant pour l'admissibilité de se consacrer principalement à la préparation de ses oraux, qui inclut le travail de repérage bibliographique, la constitution des plans de leçons, le travail spécifique à l'épreuve de modélisation, le choix et l'apprentissage des développements. En effet, toutes ces tâches chronophages nécessitent une grande force de travail et ne sauraient donc être menées à bien dans le laps de temps qui sépare les écrits des oraux.

Deux raisons pragmatiques supplémentaires incitent à agir dans cet ordre.

Tout d'abord, le travail de fond fourni pour préparer les oraux aura des répercussions significatives sur le niveau à l'écrit du candidat, en l'amenant à accomplir un travail transversal sur tout le programme du concours. En revanche, la préparation aux écrits ne bénéficiera que dans une moindre mesure à la qualité des prestations orales.

Ensuite, pour le candidat moyen, la quantité de points pouvant être récoltés à l'oral est nettement supérieure à celle des écrits. Il en est ainsi, évidemment, par le truchement des coefficients attribués aux épreuves qui donnent à l'oral un poids une fois et demi plus important que celui de l'écrit, mais aussi pour une raison de difficulté des épreuves. Par nature, les oraux évaluent en effet d'autres qualités et compétences que les seules connaissances académiques, ce qui permet d'obtenir des notes brillantes même avec un niveau mathématique relativement modeste. Décrocher de très bonnes notes à l'écrit exige en revanche un excellent niveau en mathématiques, qui seul permet de traiter les parties les plus difficiles des sujets.

2. De l'importance du développement

Le rôle joué par le développement dans la réussite des épreuves orales de mathématiques est fondamental. Non seulement il occupe une partie considérable du temps de passage au tableau, mais il présente aussi la particularité de pouvoir être préparé à l'avance. C'est le moment de l'épreuve durant lequel le candidat a la main et peut facilement faire bonne impression.

Véritable vitrine du savoir-faire mathématique du candidat et de sa pédagogie, le développement intervient assez tôt durant l'oral. Ainsi une prestation de qualité influera favorablement sur le déroulement de l'épreuve. En revanche, une piètre performance est susceptible de mettre le jury dans de très mauvaises dispositions, ce qui conduit en général à une note médiocre.

Insistons sur un point. Connaître d'un développement sa seule preuve n'est que le service minimum. Le jour du passage, il faudra avoir en tête, dans la mesure du possible, des conséquences théoriques mais aussi des applications pratiques du résultat. Le candidat devrait aussi toujours prendre de la hauteur par rapport à l'énoncé qu'il présente. Cette hypothèse est-elle nécessaire ? suffisante ? nécessaire et suffisante ? Il est impératif qu'il ait en tête (ou sur son plan) des contre-exemples pouvant attester qu'il a déjà réfléchi à ces questions. Ces exigences sont conséquentes, certes, mais l'agrégatif a le temps nécessaire pour s'y préparer durant toute l'année.

3. Utilisation du livre

Ce livre est un recueil de développements d'analyse adaptés au format de l'oral de l'agrégation, présentés avec des conseils d'exposition. Les preuves y sont rédigées et détaillées avec le niveau d'exigence propre au concours, en vue d'éviter au candidat de commettre certaines erreurs classiques.
L'agrégatif pourra y puiser jusqu'à trouver, s'il le souhaite, l'intégralité des développements nécessaires. Le jour de l'oral, il pourra donc préparer ses deux développements sans recourir à une multitude d'autres références, évitant ainsi de perdre un temps précieux dans la bibliothèque.
Néanmoins ce livre ne peut aider que ceux qui auront fait l'effort de s'en approprier le contenu, par un travail régulier, tout au long de l'année. Il est totalement vain d'espérer faire une bonne prestation le jour du concours en le feuilletant à la dernière minute.

Le candidat doit commencer par choisir ses développements tout en ayant en tête qu'il lui en faut deux par leçon. Pour l'aider dans ce choix, il trouvera à la page 21 une liste des leçons d'analyse de l'année 2023-2024 pour l'agrégation externe (options A, B et C), avec des suggestions de développements de cet ouvrage. Notons que les listes des leçons pour les candidats de l'option D et les candidats au concours spécial docteurs sont incluses dans cette liste.
Inversement, au début de chaque développement, nous avons indiqué dans quelles leçons il peut trouver sa place. Certains résultats peuvent également être présentés lors des oraux d'algèbre. Par exemple, en début de développement, le symbole ♻$_{161,181}$ signifie qu'il est loisible de présenter ce résultat dans les leçons 161 et 181.

L'année de préparation à l'agrégation pousse inéluctablement les candidats à dépasser leurs limites, cognitives comme conatives. Nous conseillons néanmoins à nos lecteurs de choisir leurs développements judicieusement en adéquation avec le niveau qu'ils espèrent atteindre le jour de l'oral (à l'issue d'une année intense de travail). Il faut garder à l'esprit qu'un développement de niveau élémentaire présenté avec brio assurera une meilleure note qu'un développement difficile mais bâclé ou mal maîtrisé. Pire, un fossé trop grand entre le niveau du développement et celui du candidat peut s'avérer catastrophique pour la note. Sauf à être dos au mur[1], il ne faut pas s'aventurer à présenter un développement sans avoir suffisamment travaillé pour obtenir, le jour du passage, le bagage théorique et technique qu'il exige. La moyenne des admis et la moyenne à l'oral des admis qui restent assez modestes (< 12 et < 13 en 2023), encouragent d'ailleurs à ne pas prendre de risques inconsidérés. Insistons enfin sur le fait que le jury de lui-même n'interrogera pas le candidat sur des résultats hors programme, mais qu'il est fondé à le faire si c'est le candidat qui a introduit dans son plan ou son développement les résultats en question. Donc à chaque fois qu'un candidat fait appel à des théorèmes qui ne sont pas au programme il devra en maîtriser au minimum l'énoncé et avoir une idée de la preuve.

Nous avons, à titre indicatif, classé les développements en trois niveaux de difficulté identifiés par les symboles suivants :

● ○ ○ Développement de niveau élémentaire qui ne présente pas de difficultés majeures. Il ne va pas forcément enthousiasmer le jury, mais on peut tout à fait espérer une bonne note si l'on en soigne la présentation. Ces exposés sont ceux qui nécessitent le moins de travail de préparation.

● ● ○ Développement de niveau intermédiaire qui peut présenter des difficultés théoriques et/ou calculatoires. La plupart des développements de l'ouvrage rentrent dans cette catégorie. Ces résultats vont permettre au candidat de montrer qu'il dispose d'un bon niveau en mathématiques et ils seront appréciés du jury pour peu qu'ils aient été bien présentés.

● ● ● Développement de niveau difficile qui nécessite des connaissances théoriques et/ou du savoir-faire. Choisir un tel développement nécessite du travail et une affinité avec le thème traité. Il a plus de chance d'impressionner le jury mais il faut néanmoins bien mesurer le rapport bénéfice/risque allant avec le choix d'un tel exposé.

Le développement est un exercice de style en temps limité, ce qui impose de répéter dans les conditions du concours, c'est-à-dire en écrivant sur un

1. Dans l'absolu, il vaut mieux proposer un développement plutôt qu'aucun, et deux plutôt qu'un seul.

tableau, tout en exposant oralement. Une telle prestation doit durer entre 13 et 15 minutes. Passé ce délai, le jury vous accordera quelques secondes pour conclure brièvement, souvent à l'oral. C'est donc une bonne idée durant les sessions d'entraînement que de se préparer au désagréable exercice qui consiste à donner rapidement les éléments essentiels qui auraient permis de conclure si l'allure avait été plus rapide.
Là aussi, nous avons à titre indicatif classé les exposés en trois niveaux de longueur :

 Développement court qui laisse au candidat une marge d'erreur et lui permet de prendre son temps. Il peut en profiter pour exposer de façon détaillée et très pédagogique.

 Développement raisonnablement long mais qui laisse peu de place à des hésitations ou à des erreurs.

 Développement long qui doit être connu sur le bout des doigts et exposé avec vivacité. Certains passages choisis doivent être éludés ou expliqués uniquement à l'oral. Le défi consistera à ne pas pour autant fixer le tableau sans jamais se retourner vers le jury.

4. Passage au tableau

Afin de rendre compte du débit de parole considérable dont doit faire preuve le candidat pendant les 15 minutes de sa présentation, nous avons favorisé un style mathématique littéraire. Il est évidemment irréaliste de vouloir tant écrire au tableau en si peu de temps, même à l'issue d'un an d'entraînement intensif.

Le candidat doit donc être capable de maintenir un débit oral soutenu, en n'inscrivant en revanche que les mots et les calculs clefs ainsi que les étapes décisives de la preuve. Il veillera à écrire dynamiquement et lisiblement, et à bien occuper l'espace de son tableau. Le recours aux dessins doit être systématique chaque fois que c'est possible, mais il faudra prendre garde à ne pas griffonner de minuscules croquis illisibles. Il vaut mieux que le candidat fasse tenir l'intégralité de son développement sur les tableaux à sa disposition, sans avoir à les effacer.

L'agrégation est un concours de recrutement de professeurs, et à ce titre, le jury s'attachera à évaluer la pédagogie dont fait preuve le candidat, et plus généralement sa présence et sa prestance à l'oral. Le candidat doit retenir l'attention du jury, voire même attiser sa curiosité. Parmi les dizaines de candidats que les membres du jury interrogent chaque semaine, parfois dans un état de lassitude avancé, l'enjeu est de se démarquer du lot et de se distinguer !

5. Des développements « version tableau »

Nous avons conscience que les agrégatifs qui parcourraient ce livre pour la première fois sans être déjà rompus à la préparation de développements pourraient être intimidés par le nombre de pages consacrées à chaque exposé. Il est légitime d'éprouver une certaine forme d'inquiétude lorsque l'on voit des résultats étalés sur une dizaine de pages qu'il s'agit de présenter en une quinzaine de minutes le jour du passage.
Évidemment, et c'est en particulier vrai pour les développements les plus longs de ce livre, une bonne partie du contenu sert avant tout à ce que le lecteur puisse travailler l'exposé le plus efficacement possible, et n'a pas vocation à être présentée. À force de préparation, et de répétitions, le candidat gagnera en aisance et apprendra à extraire le cœur de la démonstration.

Afin de l'y aider, nous donnons maintenant deux exemples de « tableaux » à l'issue d'un développement.
Nous avons choisi le développement sur la limite de variables aléatoires gaussiennes, page 193, ainsi que celui sur la caractérisation réelle de la fonction Γ (théorème de Bohr-Mollerup-Artin), page 89. Pour chaque développement, le lecteur portera une attention toute particulière à la différence significative de taille entre les deux versions, qui permet d'évaluer la proportion de détails à présenter à l'oral d'une part, et à l'écrit d'autre part.

Une dernière remarque anecdotique avant de poursuivre. Le recours à la couleur est un outil extrêmement puissant pour rendre le tableau plus lisible et vivant, et donc nous recommandons donc au lecteur de ne pas se priver de cet outil si jamais il a la chance d'y avoir accès.

Limite de variables aléatoires gaussiennes
Soient $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. vérifiant $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2) \text{ et } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X,$$ où X est une v.a. **réelle**. Alors $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel m, $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif σ^2, et $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} X$, alors $\forall r \geq 1$, $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{L}^r} X$.

Rmq. On considère que $\mathcal{N}(m,0) \overset{\mathscr{L}}{=} \delta_m$.

• Convergence des suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sigma_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et loi de X

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) = \mathrm{e}^{itm_n}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}}.$$

On a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, donc (**théorème de Paul Lévy**),

$$\varphi_{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{c.s.}} \varphi_X.$$

Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\varphi_X(t)|.$$

Or φ_X est continue et $\varphi_X(0) = 1$, donc il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| \in]0,1]$. Donc :

$$\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{2}{t_0^2}\ln(|\varphi_X(t_0)|).$$

Donc $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma^2 \geq 0$.

Montrons que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Supposons $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée, et même, sans perte de généralité, non majorée. Soient $m_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\nearrow} +\infty$ et $A \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = A) = 0$. Comme $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$, $F_{X_{n_k}}(A) \xrightarrow[k\to+\infty]{} F_X(A)$ et donc,

$$\mathbb{P}(X > A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(X_{n_k} > A).$$

Si k est assez grand, $m_{n_k} > A$, donc $\mathbb{P}(X_{n_k} > A) \geq \mathbb{P}(X_{n_k} > m_{n_k}) = \frac{1}{2}$, car $X_{n_k} \sim \mathcal{N}(m_{n_k}, \sigma_{n_k}^2)$, puis en laissant tendre k vers $+\infty$:

$$\mathbb{P}(X > A) \geq \frac{1}{2}.$$

Soit $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ telle que $A_N \underset{N\to+\infty}{\nearrow} +\infty$ et $\mathbb{P}(X = A_N) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Par continuité monotone de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{X > A_N\}\right) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(X > A_N) \geq \frac{1}{2}.$$

Absurde car X v.a. réelle.

Donc $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a donc au moins une valeur d'adhérence. Supposons que $\hat{m}$ et $\tilde{m}$ soient deux valeurs d'adhérences distinctes.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{itm_n} = \mathrm{e}^{\frac{\sigma_n^2 t^2}{2}} \varphi_{X_n}(t).$$

On considère deux sous-suites de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers $\hat{m}$ et $\tilde{m}$. Par passage à la limite :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{it\hat{m}} = \mathrm{e}^{it\tilde{m}} \left(= \mathrm{e}^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \varphi_X(t).\right)$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{it(\hat{m}-\tilde{m})} = 1$ et pour $t = \frac{\pi}{2(\hat{m}-\tilde{m})}$ on a $i = 1$: aburde.

Donc $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

Donc $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$.

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(t) = \mathrm{e}^{itm}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, donc :

$$\boxed{X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).}$$

• Convergence $\mathbb{L}^r$

Lemme. Soient $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $q \in \mathbb{N}^*$ un entier **pair**. Si $\sigma^2 = 0$ alors on a $\mathbb{E}[Y^q] = 0$. Si $\sigma^2 > 0$, alors $\mathbb{E}[Y^q] = c_q \sigma^q$, où $c_q \in \mathbb{R}_+^*$.